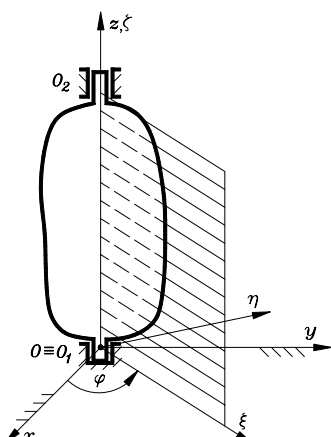


Obrtanje tela oko nepokretne ose

Telo vrši obrtanje (rotaciju) oko nepokretne ose ako su mu bar dve tačke nepomične tokom kretanja. Takođe, sve tačke tela koje se nalaze na orijentisanoj pravoj kroz te dve nepomične tačke ostaju nepomične u toku kretanja. Ta orijentisana prava naziva se osa obrtanja ili osa rotacije.



Položaj pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ u bilo kom trenutku vremena određen je uglom φ koji grade, na primer, nepokretna ravan Oxz i pokretna ravan $O\xi\zeta$. To znači da telo koje se obrće oko nepokretne ose ima jedan stepen slobode kretanja, pod uslovom da je osa obrtanja određena. Ovaj ugao se naziva ugao obrtanja. Ugao obrtanja može da se izrazi i preko broja obrtaja N , tj.

$$\varphi = 2\pi N.$$

Funkcionalna zavisnost

$$\varphi = \varphi(t),$$

naziva se jednačina obrtanja tela oko nepokretne ose.

Ugaona brzina tela koje se obrće oko nepokretne ose.

Ugaona brzina tela koje se obrće oko nepokretne ose karakteriše promenu ugla obrtanja. Uočavaju se dva položaja tela koji se razlikuju za konačan priraštaj ugla $\Delta\varphi$. Neka se telo iz položaja koji je određen uglom φ u trenutku t , pomeri za vreme Δt u položaj određen uglom $\varphi + \Delta\varphi$. Srednja ugaona brzina tela koje se obrće oko nepokretne ose Oz za posmatrani interval vremena Δt određena je sa

$$(\omega_z)_{sr} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Ugaona brzina tela u datom trenutku predstavlja graničnu vrednost srednje ugaone brzine kada posmatrani interval vremena Δt teži nuli

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \omega_z = \dot{\varphi}.$$

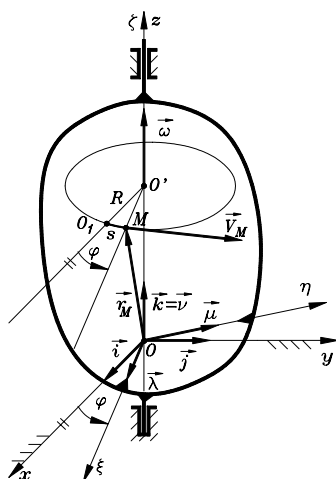
Ugaonoj brzini tela može se dati i vektorski smisao.

Uočava se tačka M čiji je položaj

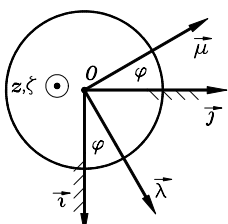
$$\vec{r}_M = \xi_M \vec{\lambda} + \eta_M \vec{\mu} + \zeta_M \vec{\nu},$$

Koristeći definiciju brzine tačke dobija se

$$\vec{V}_M = \dot{\vec{r}}_M = \dot{\xi}_M \vec{\lambda} + \dot{\eta}_M \vec{\mu}.$$



U cilju određivanja izvoda $\dot{\vec{\lambda}}$ i $\dot{\vec{\mu}}$ mogu se jedinični vektori $\vec{\lambda}$ i $\vec{\mu}$ pokretnog koordinatnog sistema $O\xi\eta\zeta$ izraziti preko jediničnih vektora \vec{i} i \vec{j} nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$



$$\vec{\lambda} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j},$$

$$\vec{\mu} = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}.$$

Diferenciranjem po vremenu, sledi

$$\dot{\vec{\lambda}} = \dot{\varphi} (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}),$$

$$\dot{\vec{\mu}} = -\dot{\varphi} (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}).$$

$$\dot{\vec{\lambda}} = \dot{\varphi} \vec{\mu}, \quad \dot{\vec{\mu}} = -\dot{\varphi} \vec{\lambda}.$$

S druge strane, jedinični vektori $\vec{\lambda}$ i $\vec{\mu}$ mogu se korišćenjem definicije vektorskog proizvoda izraziti u obliku

$$\vec{\lambda} = \vec{\mu} \times \vec{v}, \quad \vec{\mu} = \vec{v} \times \vec{\lambda}, \quad \dot{\vec{\lambda}} = \dot{\varphi} (\vec{v} \times \vec{\lambda}), \quad \dot{\vec{\mu}} = \dot{\varphi} (\vec{v} \times \vec{\mu})$$

$$\vec{V} = \dot{\varphi} \vec{v} \times (\xi_M \vec{\lambda} + \eta_M \vec{\mu} + \zeta_M \vec{v})$$

Vektor $\dot{\varphi} \vec{v}$ predstavlja vektor ugaone brzine, tj.

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{v},$$

tako da se dobija Ojlerova formula za određivanje brzine tačke tela koje se obrće oko nepokretne ose u obliku

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}_M.$$

Izvodi jediničnih vektora mogu se napisati u obliku

$$\dot{\vec{\lambda}} = \vec{\omega} \times \vec{\lambda}, \quad \dot{\vec{\mu}} = \vec{\omega} \times \vec{\mu}.$$

Brzina tačke tela koje se obrće oko nepokretne ose

Brzina tačke tela koje se obrće oko nepokretne ose može se odrediti na sledeći način: neka je u početnom trenutku ($t_o = 0$) $\varphi_o = 0$, tj. pokretan koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$ i nepokretan koordinatni sistem $Oxyz$ u početnom trenutku se poklapaju. Ako je O_1 početak lučne koordinate s na toj poznatoj putanji tako da se porast lučne koordinate (pozitivan smer u tom koordinatnom sistemu) poklapa sa pozitivnim smerom računanja ugla φ , tada važi

$$s = \widehat{O_1 M} = R\varphi(t), \quad V_T = \dot{s} = \frac{d}{dt}(R\varphi) = R\dot{\varphi}, \quad V_T = R\omega_z.$$

Ugaono ubrzanje tela koje se obrće oko nepokretne ose

Neka se telo iz položaja koji je određen uglom φ u trenutku t pomeri za vreme Δt u položaj određen uglom $\varphi + \Delta\varphi$. Srednje ugaono ubrzanje tela koje se obrće oko nepokretne ose Oz za posmatrani interval vremena Δt određeno je sa

$$(\varepsilon_z)_{sr} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t},$$

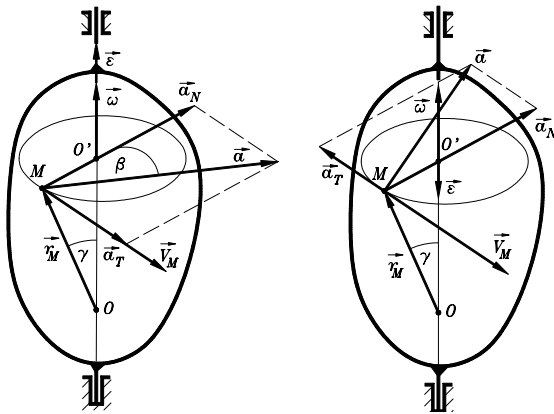
a ugaono ubrzanje tela u datom trenutku

$$\varepsilon_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt}, \quad \varepsilon_z = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

Vektor ugaonog ubrzanja tela koje se obrće oko nepokretne ose je

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\varphi} \vec{v} = \omega_z \vec{k} = \varepsilon_z \vec{k}.$$

Ubrzanje tačke tela koje se obrće oko nepokretne ose



Ubrzanje tačke M tela koje se obrće oko nepokretne ose može se odrediti na više načina. Ako je poznat zakon promene lučne koordinate, tangencijalno ubrzanje tačke M tela može se odrediti kao

$$a_T = \dot{V}_T = \frac{d}{dt}(R\omega_z) = R\epsilon_z, \quad |a_T| = R\epsilon.$$

Normalno ubrzanje tačke M tela može se odrediti kao

$$a_N = \frac{V^2}{R} = R\omega^2,$$

a ukupno ubrzanje tačke M tada je određeno sa

$$a_M = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = R\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{a_T}{a_N} = \frac{\epsilon_z}{\omega_z^2}.$$

Ubrzanje tačke M tela koje se obrće oko nepokretne ose može se dobiti i kao

$$\vec{a}_M = \dot{\vec{V}}_M = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_M), \quad \vec{a}_M = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_M + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_M$$

$$\vec{a}_M = \vec{\epsilon} \times \vec{r}_M + \vec{\omega} \times \vec{V}_M, \quad \vec{a}_M = \vec{\epsilon} \times \vec{r}_M + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_M).$$

$$\vec{a}_T = \vec{\epsilon} \times \vec{r}_M, \quad \vec{a}_N = \vec{\omega} \times \vec{V}_M = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_M),$$

$$\vec{a}_M = \vec{a}_T + \vec{a}_N.$$